

## EXTREMÁLIS TULAJDONSÁGÚ TOROIDOK

SZILASSI LAJOS

Jórészt már az ókorban tisztázott kérdés, hogy adott tulajdonságú (pl. szabályos) sokszögekből építkezve legkesvesebb hány sokszögre van szükségünk egy egyszerű poliéder előállításához. Nyitott kérdéshez csak úgy juthatunk, ha a poliédert határoló lapokra és testszögletekre egyre bonyolultabb feltételeket szabunk.

Lényegesen összetettebb kérdéscsoportozáshoz jutunk, ha ugyanezt a problémát a magasabb nemszámú poliéderek körében vetjük fel.

Toroidnak (tórusz-szerű poliédernek) nevezzük azokat a közönséges poliédereket, melyeknek a nemszáma  $p \geq 1$ .

Egy poliéder nemszáma  $p$ , ha topológiailag ekvivalens egy  $p$  darab „fogantyúval” ellátott gömbbel (1. ábra). Speciálisan a gömb nemszáma 0, a tórusz nemszáma 1. A  $p$  nemszámú, egyszerű sokszögekkel határolt közönséges poliéderre érvényes az Euler-féle  $L + C - E = 2 - 2p$  összefüggés, ahol  $L$  a lapok,  $C$  a csúcsok,  $E$  az élek számát jelenti [1].

Nevezzünk egy toroidot szabályosnak, ha minden lapjának ugyanannyi éle van, és minden csúcsába ugyanannyi él fut be.

Legyen egy  $p=1$  nemszámú szabályos toroid egy lapjára illeszkedő éleinek száma  $a$ , az egy csúcsára illeszkedő éleinek száma  $b$ . Az  $L \cdot a$  és  $C \cdot b$  szorzatok egyaránt az élek számának a kétszeresét adják, mivel minden él pontosan két lapra és két csúcsra illeszkedik. Ezek, valamint az előbb említett Euler-féle összefüggés alapján kapjuk, hogy

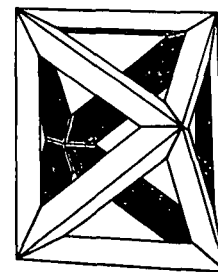
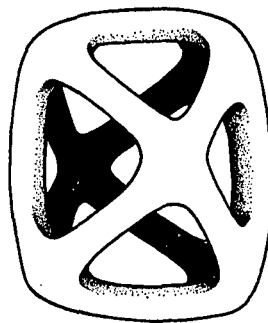
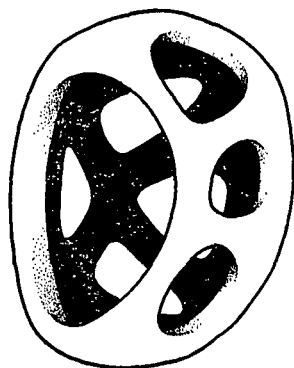
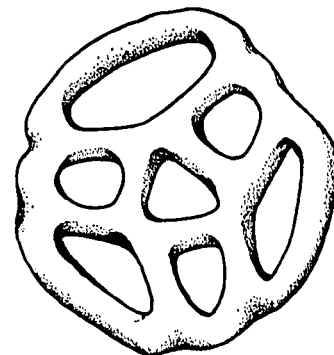
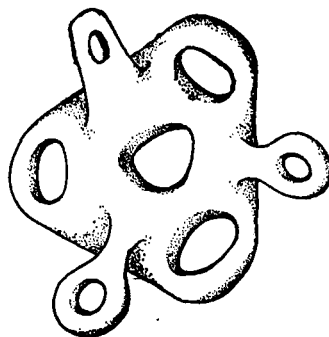
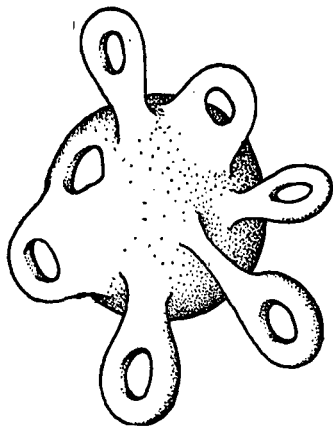
$$\frac{2E}{a} + \frac{2E}{b} - E = 0,$$

ebből pedig  $E > 0$ -t kihasználva az

$$a = 2 + \frac{4}{b-2}$$

diofantoszi egyenlethez jutunk. Az egyenletet csak három olyan  $(a, b)$  számpár elégíti ki, amely elegendő tesz az  $a \geq 3$  és  $b \geq 3$  feltételnek. Eszerint a  $p=1$  nemszámú szabályos toroidok — az egy lapra ill. csúcsra illeszkedő élek száma szerint osztályozva — három osztályba sorolhatók:  $S_1: a=3, b=6$ ;  $S_2: a=4, b=4$ ;  $S_3: a=6, b=3$ .

Mint közzismert, a sík egybevágó szabályos sokszögekkel történő hézagmentes lefedésének csak három módja van, a szabályos háromszögekkel, négyzetekkel és szabályos hatszögekkel való lefedés. A három parkettázás topológiailag éppen az előző három esetnek felel meg. Ha egy ilyen kiparkettázott síkból kiragadunk egy „elég nagy” téglalapot, és összeragasztjuk a szemben levő éleit, akkor egy olyan tóruszra rajzolt térképhez jutunk, amely topológiailag szabályos. Ha ennek a térképnek elég



1. ábra  $p=7$  nemszámú felületek

Az 1. ábra rajzait Sinkó János grafikus (Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Rajz- Művészettörténeti Tanszéke) készítette.

sok tartománya van, akkor a síklapokkal való realizálásnak nincs elvi akadály. Mondhatjuk tehát, hogy mindhárom osztályban végtelen sok szabályos toroidot elő tudunk állítani. Érdekes kérdés azonban, — mint azt L. ALAOGU és J. H. GIESE [2] felvetette — hogy legalább hány lapra illetve csúcsra van szükségünk egyes az osztályokba tartozó szabályos toroidok előállításához, esetleg szigorítva a kikötést azzal, hogy a toroid lapjai — vagy testszöglei — az egybevágóság szempontjából minél kevesebb osztályt alkossanak.

Az adott tulajdonságú — nem feltétlenül szabályos — minimális lapszámú toroidokkal kapcsolatos legfontosabb ismereteket B. M. STEWART nyomán [3] — a következőképpen foglalhatjuk össze:

Jelölje  $F(j, p)$  azoknak a közönséges toroidoknak a minimális lapszámát, melyeknek nemszáma  $p$ , és minden lapjuk rendelkezik a  $j$  tulajdonsággal, ahol  $j$  az alábbi tulajdonságok egyikét jelöli:

- (1) egyszerű sokszög,
- (2) konvex,
- (3) szigorúan konvex (azaz szomszédos élei nem esnek egy egyenesbe),
- (4) háromszög,
- (5) szabályos,
- (6) szabályos háromszög,
- (7) szabályos ötszög,
- (8) négyzet.

Az (1), (2), (3), (4), (5) tulajdonságú poliédereket vizsgálva felvetjük azt a kérdést is, hogy a lapok között hány nem egybevágó van. Jelölje a nem egybevágó lapok számát  $k$ , az ilyen poliéderek minimális lapszámát pedig  $F(j, k, p)$ .

$F(j, p)$ -re, ill.  $F(j, k, p)$ -re az alábbi állítások igazak:

$$A_1 : F(1, 1) = F(1, 4, 1) = 7$$

$$A_2 : F(2, 1) \leq F(3, 1) \leq F(3, 2, 1) \leq 9$$

$$A_3 : F(1, p) \leq 6 + 3p$$

$$A_4 : F(1, 4, p) \leq 9 + 3p$$

$$A_5 : F(2, 2) \leq F(3, 2) \leq F(3, 6, 2) \leq 14$$

$$A_6 : F(2, p) \leq F(3, p) \leq F(3, 6, p) \leq 6 + 4p \quad (p \geq 2)$$

$$A_7 : F(3, 2, 2) \leq 16$$

$$A_8 : F(3, 2, p) \leq 7p \quad (p \geq 3)$$

$$A_9 : F(3, 2, p) < 7p \quad (p \geq 14)$$

$$A_{10} : F(4, 1) = F(4, 7, 1) = 14$$

$$A_{11} : F(4, 2, 1) \leq 36$$

$$A_{12} : F(4, 1, 1) \leq 36$$

$$A_{13} : F(5, p) \leq F(5, 2, p) \leq 2 + 19p$$

$$A_{14} : F(5, 3, 2) \leq 34; F(5, 3, 3) \leq 38$$

$$A_{15} : F(5, 4, p) \leq 54 + 2p \quad 4 \leq p \leq 11; F(5, 4, 12) \leq 90$$

$$A_{16}: F(6, p) \cong 20 + 28p$$

$$A_{17}: F(7, p) \cong 32 + 48p$$

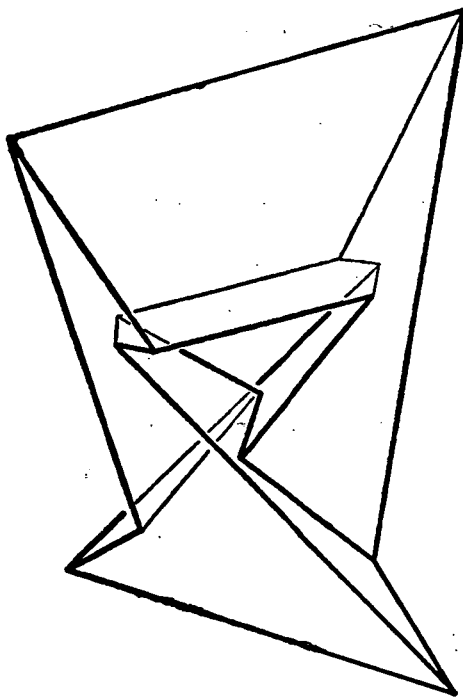
$$A_{18}: F(8, p) \cong 54 + 42p$$

Az itt összefoglalt 18 állítás mindegyikére található [3]-ban bemutatott példa, vagy bizonyítás.

Ebben a dolgozatban a fenti állításokat igazoló poliéderek (pl. az  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_{10}$  állításban szereplő minimális lapszámú szabályos toroidok) további elemzésével, majd az  $A_{11}$  és  $A_{12}$  állítások finomításával foglalkozunk, megmutatva például, hogy 36 helyett 24 egybevágó háromszög is elegendő egy  $p=1$  nemszámú toroid előállításához.

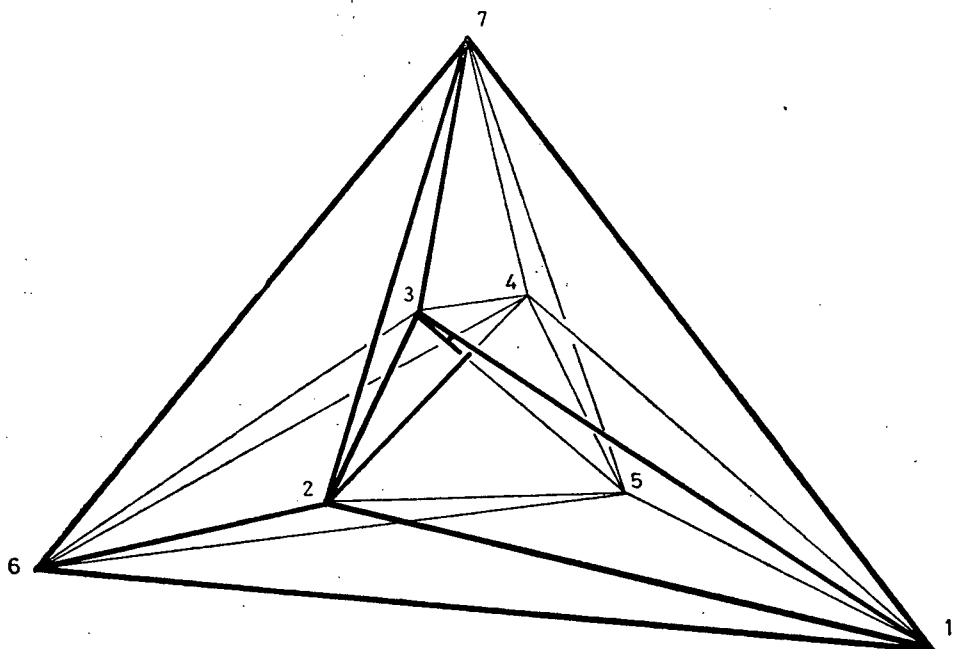
1. Az  $A_1$  állításban szereplő — 1977-ben felfedezett [4] — hétlapú toroid lapjai olyan egyszerű sokszögek, melyek közül bármely kettőnek van közös éle, azaz bármely kettő szomszédos (2. ábra). Ez azt jelenti, hogy hét síklappal is realizálható az ún. Heawood-féle tóruszra rajzolt hét tartományú térkép, amelynek bármely két tartománya szomszédos. (Így ez a térkép csak akkor színezhető ki úgy, hogy a közös határvonalú tartományok különböző színűek legyenek, ha mind a hét tartomány különböző színt kap. A poliéder további érdekessége, hogy szabályos: minden lapja hatszög és minden csúcsába három él fut be. (A konstruálásához szükséges adatok [3]-ban, vagy [4]-ben megtalálhatók.)

Ennek a poliédernek a topológiai értelemben vett duálisa az  $A_{10}$  állításban szereplő ún. Császár-poliéder, melyet Császár Ákos fedezett fel 1949-ben [5]. A dualitásból adódóan ez a poliéder is szabályos: minden csúcsába hat él fut be, lapjai három-



2. ábra. Hétlapú szabályos toroid: bármely két lapjának van közös éle

szögek, s míg az előzőben bármely két lapnak volt közös éle, itt bármely két csúc-  
nak van közös éle, azaz nincs átlója (3. ábra).



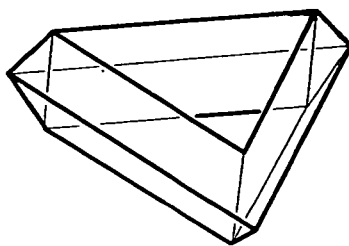
3. ábra. Hétszűcsű szabályos toroid: bármely két csúcának van közös éle

A 2. ill. 3. ábrán bemutatott poliéderek nyilvánvalóan a szabályos toroidok  $S_1$  ill.  $S_3$  osztályába tartozó minimális lapszámú toroidok. Az Euler-féle összefüggést, valamint a toroidok közönséges poliéder voltát kihasználva az is belátható, hogy sem hétnél kevesebb lapú, sem hétnél kevesebb csűcsű toroid nem létezik, így az  $A_1$  és  $A_{10}$  állításokban valóban indokolt az egyenlőségjel használata.

A szabályos toroidok  $S_2$  osztályába tartozó minimális lapszámú toroid hat egybevágó szimmetrikus trapézból és három egybevágó téglalapból áll (4. ábra). Állításunk igazolására szemeljünk ki az  $S_2$  osztály egy tetszőleges poliéderének egy  $A$  csűcsát. Az  $A$  csűcsra illeszkedő négy lap mindegyikére további három csűcs illeszkedik. A szomszédos lapoknak  $A$ -n kívül még egy közös csűcsuk van. Több nyilvánvalóan nem lehet, mert ekkor a két lap síkja egybeesne. A közös éllel nem rendelkező (szemben fekvő) lapoknak  $A$ -n kívül nem lehet további közös csűcsa, mert így a két lapnak lenne az  $A$  csűcsra illeszkedő metszészvonala, így ellentmondásba kerűlnénk azzal, hogy az  $S_2$  osztályt közönséges poliéderek alkotják. Eszerint minden  $S_2$ -beli toroidnak van legalább kilenc csűcsa, így a 4. ábra valóban egy minimális lap- és csűcsszámú  $S_2$ -beli toroidot ábrázol.

Ez a toroid támasztja alá az  $A_2$  állítást. A fentiek alapján azonban nem írhatunk egyenlőségjelet az  $F(3, 2, 1) \cong 9$  egyenlőtlenségjel helyére, mivel az  $A_2$  állítás feltételei között nem szerepel a szabályos megszorítás.

Ha ebből a kilenc lapú és kilenc csűcsű toroidból több egybevágót egymáshoz illesztünk az egybevágó lapok mentén, akkor ezzel olyan 1-nél magasabb nemszámú toroidokhoz jutunk, melyek indokolják az  $A_6$ ,  $A_7$  és  $A_8$  állítást. Némely nemszám



4. ábra. Kilencalapú, kilenccsúcshú szabályos toroid

esetén kaphatunk az  $A_8$ -ból adódónál finomabb eredményt is. Pl. a  $p=7$  nemszámú toroidokra  $A_8$ -ból  $F(3, 2, 7) \leq 7 \cdot 7 = 49$  adódik, az 1. ábrán bemutatott  $p=7$  nemszámú toroid, — melyet háromélű prizma alakú rudakból épített élvázis oktaédernek is tekinthetünk — 12 db egybevágó hatszögből és  $8 \cdot 3 = 24$  egybevágó szimmetrikus trapéz-ból áll, így ez alapján kimondhatjuk, hogy  $F(3, 2, 7) \leq 36$ .

2. Az eredeti Császár-poliéder [5]-ben (és [3]-ban is) leírt numerikus adatait vizsgálva kitűnt, hogy a poliéder lapszögei között vannak olyanok, melyek igen közel vannak a  $0^\circ$ -hoz, ill.  $360^\circ$ -hoz, így a poliéder modellje „zsúfoltnak” — tűnik. Egy „szellősebb” változat keresése érdekében célszerűnek tűnt egy olyan számítógépi programot készíteni, amely a hét csúcs derékszögű koordinátáiból kiindulva először ellenőrzi, hogy a hét pont által meghatározott poliéder nem önátmetsző-e, majd kiszámítja a poliéder éleinek hosszát, élszögeit és lapszögeit. A számítógépi programot alkalmazva a koordináták „finom” változtatásával sikerült egy szellősebb, és több szempontból is tetszetősebb változatot kapni. Sőt a hét pont helyét, egymáshoz való viszonyát alapvetően átrendezve sikerült egy az eredetitől lényegesen különböző, de a Császár-poliéder összes tulajdonságával rendelkező változathoz jutunk. Az 1. táblázatban  $C_0$  jelöli az eredeti,  $C_1$  az ettől kissé eltérő változat,  $C_2$  a lényegesen eltérő változat numerikus adatait.

A poliéderek modelljeinek az elkészítéséhez tudnunk kell még, hogy a hét pont által meghatározott  $\binom{7}{3} = 35$  háromszög közül melyik az a 14, amely a poliéder felületét alkotja, és ezek milyen sorrendben csatlakoznak egymáshoz. A 2. táblázatban ezeket a háromszögeket a csúcsaik számával adjuk meg. Megadjuk továbbá, hogy az egy-egy csúcsba befutó élek milyen ciklikus sorrendben követik egymást.

Az 1. táblázatban megadott koordinátákat vizsgálva kitűnik, hogy — mindhárom változatban — az 1. és 6., 2. és 5., valamint a 3. és 4. csúcs egymásnak a koordinátarendszer  $z$  tengelyére vonatkozó tükröke, így a 2. táblázatban egymás alá írt háromszögek nyilvánvalóan egybevágók, tehát valóban hét különböző háromszög-pár alkotja a poliédert, mint azt  $A_{10}$  állítja. Ugyancsak egybevágók az előbbi csúcspárokhoz tartozó testszögletek is. Így a poliédernek négy nem egybevágó testszögle van.

Az 1. táblázat adatait vizsgálva kitűnik, hogy  $C_0$  és  $C_1$  kapcsolata valóban szorosabb, mindkettőnek ugyanott vannak konkáv lapszögei, folytonosan változtatva a csúcsok koordinátáit átalakítható egyik a másikra úgy, hogy eközben soha ne legyen önátmetsző a poliéder.  $C_1$ -re és  $C_2$ -re ugyanez nem mondható el, csak topológiaiilag egyeznek meg.

$C_0$ -nak a legkisebb élszöge a  $2-7-3$  szög alig több  $7^\circ$ -nál.  $C_1$ -ben ezt az élszögek szempontjából kritikus  $(2-3-7)$  háromszöget sikerült egyenlőszárúvá alakítani, amelynek az alapon fekvő szögei több, mint  $15^\circ$ -osak.  $C_1$ -ben az  $(1-6-2)$  egyenlő-

1. táblázat

Csúcs	$C_0$			$C_1$			$C_2$		
	$X$	$Y$	$Z$	$X$	$Y$	$Z$	$X$	$Y$	$Z$
1.	3	-3	0	$4\sqrt{15}$	0	0	-3	4	$\frac{13\sqrt{2}}{2}$
2.	3	3	1	0	8	4	0	12	0
3.	1	2	3	-1	2	11	12	0	$12\sqrt{2}$
4.	-1	-2	3	1	-2	11	-12	0	$12\sqrt{2}$
5.	-3	-3	1	0	-8	4	0	-12	0
6.	-3	3	0	$-4\sqrt{15}$	0	0	3	-4	$\frac{13\sqrt{2}}{2}$
7.	0	0	15	0	0	20	0	0	$\frac{26\sqrt{2}}{3}$

Élek	Élhossz	Lapszög	Élhossz	Lapszög	Élhossz	Lapszög
(1-6)	8,49	$153^\circ 28'$	30,98	$126^\circ 52'$	10	$76^\circ 8'$
(2-5)	8,49	$321^\circ 3'$	16	$343^\circ 44'$	24	$70^\circ 32'$
(3-4)	4,47	$253^\circ 24'$	4,47	$256^\circ 53'$	24	$54^\circ 26'$
(2-4)=(5-3)	6,71	$78^\circ 20'$	12,25	$69^\circ 8'$	24	$51^\circ 3'$
(2-3)=(5-4)	3	$216^\circ 23'$	9,27	$208^\circ 37'$	24	$52^\circ 43'$
(3-7)=(4-7)	12,21	$268^\circ 39'$	9,27	$279^\circ 25'$	12,89	$340^\circ 8'$
(2-7)=(5-7)	14,63	$18^\circ 17'$	17,89	$35^\circ 54'$	17,15	$74^\circ 25'$
(1-5)=(6-2)	6,08	$87^\circ 29'$	17,89	$90^\circ$	18,69	$339^\circ 19'$
(1-2)=(6-5)	6,08	$44^\circ 17'$	17,89	$67^\circ 6'$	12,55	$156^\circ 51'$
(1-4)=(6-3)	5,1	$352^\circ 5'$	18,3	$343^\circ 23'$	12,55	$204^\circ 28'$
(1-3)=(6-4)	6,16	$58^\circ 7'$	19,92	$57^\circ 6'$	17,36	$41^\circ 40'$
(1-7)=(6-7)	15,59	$76^\circ 20'$	25,3	$56^\circ 50'$	5,86	$243^\circ 30'$

2. táblázat

A Császár-poliéder lapjai:

(1-6-2)	(1-4-2)	(2-4-5)	(1-3-4)	(1-5-7)	(5-4-7)	(4-6-7)
(6-1-5)	(6-3-5)	(5-3-2)	(6-4-3)	(6-2-7)	(2-3-7)	(3-1-7)

Csúcs	Szomszédainak ciklikus sorrendje					
1.	3,	4,	2,	6,	5,	7
2.	6,	1,	4,	5,	3,	7
3.	2,	5,	6,	4,	1,	7
4.	5,	2,	1,	3,	6,	7
5.	1,	6,	3,	2,	4,	7
6.	4,	3,	5,	1,	2,	7
7.	1,	5,	4,	6,	2,	3

szárú háromszög csúcsszöge  $120^\circ$ , az (1-5-7) háromszög pedig egyenlőszárú derékszögű. (A. 3. ábra a  $C_1$  poliéder axonometrikus képe.) A  $C_2$  poliéder csúcsait úgy választottuk, hogy az 1, 6, 3, 4 csúcsok szabályos tetraédert alkossanak. Itt a konstrukció szempontjából az (1-2-4) háromszög „kritikus”. Az 1,6 csúcs-pár alkalmas megválasztásával elértük, hogy ez a háromszög egyenlőszárú legyen, és az alapon fekvő szögei több, mint  $17^\circ$ -osak.

Felvethető a kérdés, hogy a koordináták változtatásával kaphatunk-e ezeknél lényegesen „szellősebb” változatokat, létezik-e az eddigi két változattól is lényegesen eltérő további átló nélküli toroid.  $C_1$  és  $C_2$  lényegesen különböző volta sugallja a kérdést, hogy az először említett hétlapú toroidnak van-e ettől lényegesen különböző változata.

3. A tóruszra rajzolható Heawood-féle hétszínű térkép poliéderekkel való realizálása az  $A_1$  állításon kívül még több érdekes poliéder konstruálására ad lehetőséget. Pl. Stewart konstruált egy olyan szabályos háromszögekből, négyzetekből és szabályos hatszögekből álló toroidot, melynek a lapjait alkalmas módon színezve minden szín szomszédos lesz az összes többivel ([3] 198—199. old.). Ugyancsak Stewart állított elő egy olyan toroidot is, amelynek egy-egy részét alkalmas módon színezve minden szín szomszédos lesz az összes többivel, ugyanakkor mind a hét — különböző színű — tartománya egybevágó is egymással ([3] 202—203. old.). Ennek minden tartománya két téglalapból, egy háromszögből és további két — eléggé bonyolult — általános négyszögből áll. Ezt az alakzatot sikerült úgy egyszerűsíteni, hogy minden tartománya négy háromszögből áll, melyek közül kettő-kettő egybevágó.

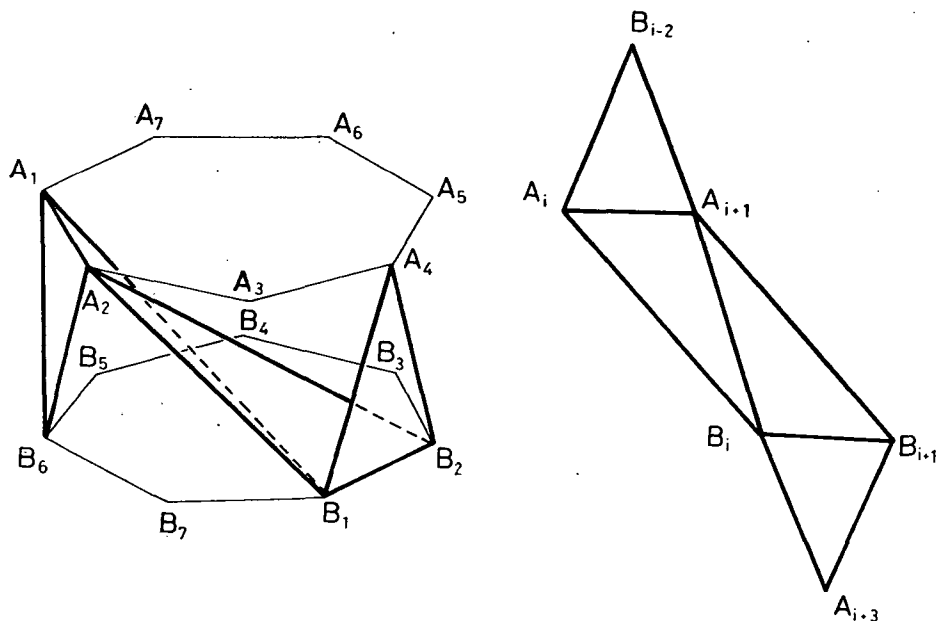
Előállításához tekintsük az  $A_1, A_2, \dots, A_7$  szabályos hétszöget. Forgassuk el a  $360^\circ$  középpont körül  $2,5 \cdot \frac{360^\circ}{7}$  nagyságú szöggel, majd toljuk el a síkjára merőleges irányban. Ily módon a  $B_1, B_2, \dots, B_7$  szabályos hétszöghöz jutunk. Színezzük azonos színűre, és nevezzük egy tartománynak az  $A_i A_{i+1} B_{i-2} \Delta$ ,  $A_i A_{i+1} B_i \Delta$ ,  $B_i B_{i+1} A_{i+1} \Delta$ ,  $B_i B_{i+1} A_{i+3} \Delta$  háromszögekből álló alakzatot, ahol  $i = 1, 2, \dots, 7$ . (5. ábra). (Ha valamely  $i$  index nem esik 1 és 7 közé, akkor helyette természetesen az  $1 \leq i' \leq 7$  indexet kell vennünk, ahol  $i' \equiv i \pmod{7}$ ). Az alakzat háromszögei közül kettő-kettő egybevágó, és egyik háromszögpár egyenlőszárú. Ha az  $i$ -edik tartományt  $\frac{360^\circ}{7}$  fokkal elforgatjuk a két szabályos hétszög középpontjára illeszkedő tengely körül, akkor az  $(i+1)$ -edikhez jutunk. Így ezek a tartományok valóban egybevágóak, együtt egy toroidot alkotnak, és a tartományt határoló élek indexeit vizsgálva beláthatjuk, hogy mindegyik tartomány mindegyikkel szomszédos. (Pl. az  $i$ -edik tartomány  $A_i B_i$  éle menti szomszédja az  $(i-1)$ -edik,  $A_i B_{i-2}$  éle menti szomszédja az  $(i-3)$ -adik stb.)

A poliéder előállításához tesztölegesen megadhatjuk a szabályos hétszög köré írt körét, és a két hétszög síkjának a távolságát, vagy pl. az  $A_i A_{i+1} B_{i-2}$  egyenlőszárú háromszög oldalait. A megadott ill. kiszámított élhosszak mellett közöljük az élhez tartozó lapszög nagyságát is. A 3. táblázat a toroid három, — méreteiben különböző — változatának az adatait tartalmazza.

Ez a poliéder már önmagában is finomítja a bevezetőben közölt  $A_{11}$  állítást, hiszen eszerint  $F(4, 2, 1) \leq 4 \cdot 7 = 28$ , ráadásul a kapott poliéder nemcsak szabályos, hanem bármely két testszöglete is egybevágó. Még további finomításra is van lehetőség, ha hétoldalú helyett hatoldalú szabályos sokszöget veszünk a konstrukció alapjául. Ebből  $F(4, 2, 1) \leq 24$  érték adódik. Ez a poliéder az előzőhöz hasonlóan állítható elő. Három — ugyancsak méreteiben különböző — változatának a numerikus adatait tartalmazza a 4. táblázat. Erre a toroidra hivatkozva kimondhatjuk tehát, hogy *létezik olyan —  $S_1$  osztályba tartozó — szabályos toroid, melynek huszonnégy — az egybevágóság szempontjából kétféle — háromszög-lapja van, és mind a tizenkét testszöglete egybevágó.*

A 3. és 4. táblázat adatait összehasonlítva láthatjuk, hogy az utóbbi sokkal „zsúfoltabb”. Ezen az úton nem juthatunk még kevesebb lapszámú poliéderhez,





5. ábra. Hét tartományból álló szabályos toroid: bármely két tartománya szomszédos, bármely két tartománya egybevágó

3. táblázat

Hét egybevágó, páronként szomszédos tartományú toroid

él	1. változat		2. változat		3. változat	
	élhossz	lapszög:	élhossz:	lapszög:	élhossz:	lapszög:
$\overline{A_i A_{i+1}}$	6	$64^\circ 1'$	6	$51^\circ 45'$	6	$43^\circ 21'$
$\overline{A_i B_{i-2}}$	6	$150^\circ 13'$	8	$152^\circ 13'$	10	$153^\circ 1'$
$\overline{A_i B_i}$	13,48	$51^\circ 12'$	14,48	$65^\circ 11'$	15,68	$74^\circ 33'$
$\overline{A_{i+1} B_i}$	10,04	$332^\circ 15'$	11,35	$325^\circ 13'$	12,84	$320^\circ 43'$

$$i = 1, 2, \dots, 7$$

4. táblázat

Húszonnéggy lapú, egybevágó testszögletű toroid

él	1. változat		2. változat		3. változat	
	élhossz:	lapszög:	élhossz:	lapszög:	élhossz:	lapszög:
$\overline{A_i A_{i+1}}$	6	$66^\circ 50'$	6	$54^\circ 15'$	6	$45^\circ 36'$
$\overline{A_i B_{i-2}}$	6	$145^\circ 13'$	8	$147^\circ 35'$	10	$148^\circ 31'$
$\overline{A_i B_i}$	12,68	$44^\circ 5'$	13,74	$56^\circ 27'$	14,99	$64^\circ 46'$
$\overline{A_{i+1} B_i}$	9,92	$344^\circ 12'$	11,24	$340^\circ 4'$	12,74	$337^\circ 24'$

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

mert pl. szabályos ötszöget véve alapul, az összes  $\overline{A_i B_i}$  él egy pontra, az alakzat szimmetria-centrumára illeszkedne.

4. Mint láttuk, az  $S_3$  osztály minimális lapszámú toroidjának (2. ábra) hét lapja van, melyek egy egybevágóság szempontjából négy osztályba, testszöglelei hét osztályba sorolhatók. Be fogjuk látni, hogy *létezik olyan kilenc lapú ( $S_3$  osztálybeli) szabályos toroid, melynek az egybevágóság szempontjából kétféle lapja, háromféle testszöglete van.*

Vetítsünk egy kockát merőlegesen az egyik kiválasztott testátlójára merőleges  $\pi$  képsíkra! A keletkező vetület szabályos hatszög alakú, így a kocka szomszédos lapjaira illeszkedő, egymáshoz képest kitérő,  $\pi$ -vel párhuzamos lapátlóinak a vetületei harmadolják egymást. Ez azt jelenti, hogy a szöbänforgó lapátlók megfelelő harmadolópontjait összekötő szakaszok párhuzamosak a kiválasztott testátlóval.

Ezt kihasználva fúrjuk át a kockát egy olyan háromélű prizmával, melynek élei párhuzamosak a kocka testátlójával, és illeszkednek a kocka két-két kitérő lapátlójának a harmadolópontjaira (6. ábra).

A keletkező toroid-felület „külső” részét a kockalapokból megmaradt, egymással egybevágó, hat darab konkáv hatszög, „belső” részét pedig az áthatás során keletkezett három, egymással szintén egybevágó, konvex hatszög alkotja.

Itt jegyezzük meg, hogy az összes eddig említett poliédernek — az 1. és a 4. ábra poliédereit kivéve — van egy „jobbos” és egy „balos” változata, melyek csak síkra vonatkozó tükrözéssel vihetők át egymásba, térbeli mozgatással nem.

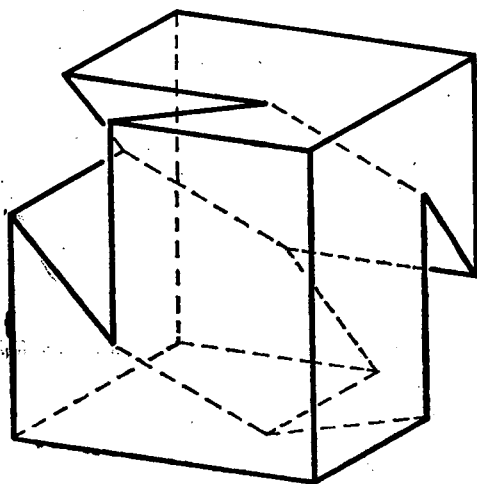
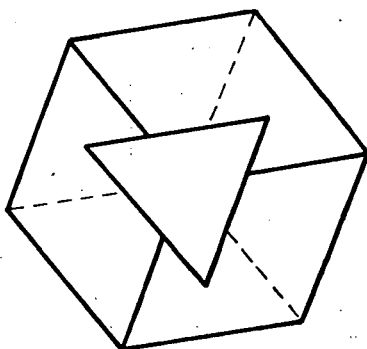
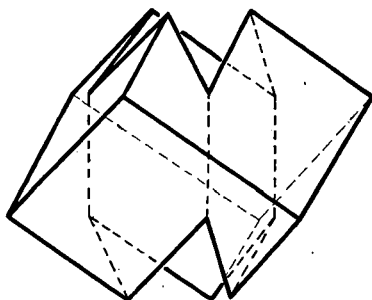
5. Az  $A_{11}$  állítás igazolása L. Alaoglu és J. H. Giese nevéhez fűződik ([2].) Az általuk előállított 36 lapú, szabályos toroidot olyan háromszöglapok alkotják, amelyek az egybevágóság szempontjából két osztályba sorolhatók. Ezt a konstrukciót finomította B. M. Stewart azzal, hogy a [2]-ban leírt poliédert csupa egybevágó, egyenlőszárú háromszögekből állította elő ([3] 250—253. old.); így az —  $A_{11}$ -nél szigorúbb —  $A_{12}$  állításhoz jutott.

Az  $A_{12}$  állítás tovább finomítható  $F(4, 1, 1) \cong 24$ -re az alábbi poliéder előállításával:

Tekintsünk egy  $a$  oldalú szabályos háromszöget, forgassuk el a középpontja körül  $60^\circ$ -kal, majd toljuk el a síkjára merőleges irányban — később meghatározandó —  $x$  távolsággal. Az így keletkezett hat pont meghatároz hat darab  $a$  alapú és  $b$  szárú egyenlőszárú háromszöget. Ezek alkotják a keletkező toroid-felület „belső” részét. A toroid felületének a „külső” részét ezekkel egybevágó egyenlőszárú háromszögek fogják majd alkotni. Ehhez újabb hat csúcsot kell felvennünk úgy, hogy azok egymástól  $b$ , az előbb felvett csúcsoktól  $a$  ill.  $b$  távolságra legyenek. A 7. ábra a poliéder Monge-féle képe.

Jelölje  $t$  az alapul vett szabályos háromszög középpontjára illeszkedő, síkjára merőleges egyenest. A keresett alakzat invariáns lesz a  $t$  körüli  $120^\circ$ -os elforgatásra, és centrálisan szimmetrikus az először felvett hat pontból álló „belső” felületrész szimmetria centrumára. Így az utóbb felvett hat pont Monge-féle első képe szabályos hatszög alakú.

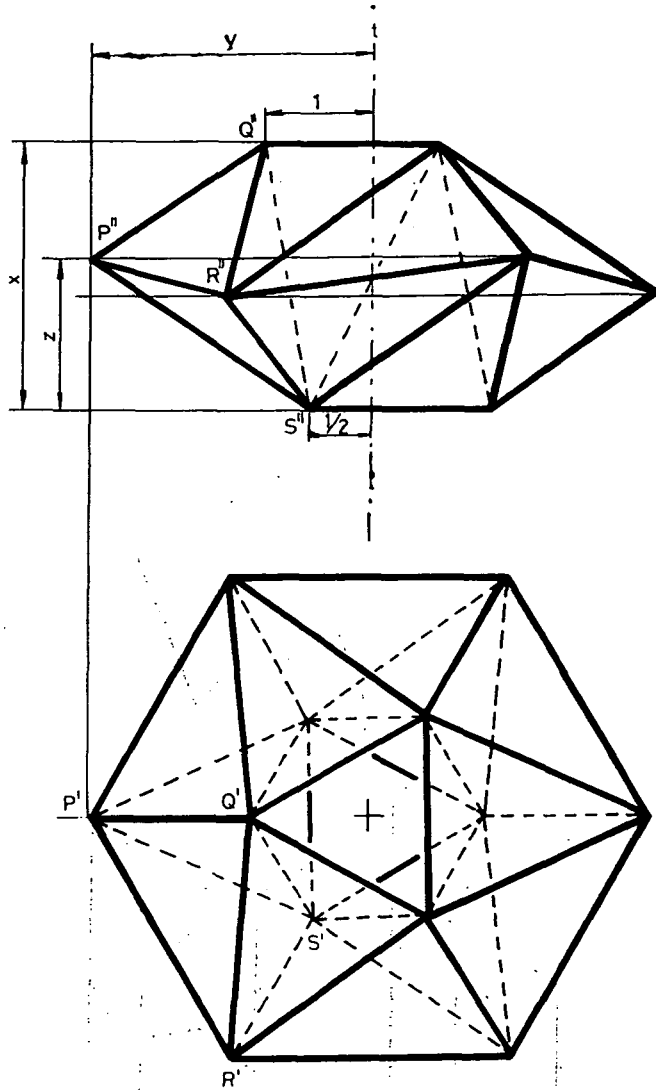
Feladatunk az, hogy úgy válasszuk meg a már említett  $x$  távolságot, — vagyis az  $a$  és  $b$  oldalak arányát — hogy a 6. ábrán jelölt  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  és  $S$  pontokra teljesüljenek a  $\overline{PQ}=a$ ,  $\overline{PR}=b$  és  $\overline{PS}=b$  egyenlőségek. Legyen az alapul vett szabályos háromszög köre írt körének a sugara egységnyi. Ekkor  $a=3$ ,  $b=x^2+1$ , mivel  $Q'S'=1$ ,  $Q$  és  $S$  magasság-különbsége pedig  $x$ .



6. ábra. Kétféle hatszögből álló kilenc lapú szabályos toroid

Jelölje  $y$  a  $P$  pont és a  $t$  egyenes távolságát, azaz a „külső” vetület-hatszög köré írt kör sugarát,  $z$  a  $P$  pontnak az első képsíktól mért távolságát. A  $\overline{PQ} = a$  feltételből

$$(1) \quad (y-1)^2 + (x-z)^2 = 3,$$



7. ábra. Huszonnégy egybevágó, egyenlőszárú-háromszögből álló toroid

az a  $\overline{PR}=b$  feltételből  $\overline{P'R'}=y-t$  kihasználva

$$(2) \quad y^2 + (x - 2z)^2 = x^2 + 1,$$

valamint a  $\overline{PS}=b$  feltételből a  $(\overline{P'S'})^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$  kihasználásával a

$$(3) \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 = x^2 + 1$$

egyenletek adódnak.

Az (1), (2), (3) egyenletekből álló egyenletrendszer pozitív gyökei:  $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ ,

$y = 1+\sqrt{2}$ ,  $z = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ . Ebből  $b = \frac{\sqrt{15+6\sqrt{2}}}{2}$ , innen pedig a poliéderfelület modelljének az előállításához szükséges egyetlen adat, az  $a:b$  arány,  $a:b=2:\sqrt{5+2\sqrt{2}}=2:2798$  adódik.

A kapott poliéder „belső” részét hat, a „külső” részét  $2 \cdot 9 = 18$  háromszög alkotja, így valóban az  $A_{12}$  állítás helyett kimondhatjuk a szigorúbb  $F(4, 1, 1) \cong 24$  állítást. *Létezik tehát egy olyan huszonnégylapú toroid, amelynek a lapjai egybevágó, egyenlőszárú háromszögek.* Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ez a poliéder nem szabályos, hiszen  $P$ -be öt,  $Q$ -ba hét él fut be. A testszögletek egybevágóságuk alapján két osztályba sorolhatók.

A bevezetőben említett tizennyolc állítás lényegében felvetett problémának is tekinthető, hiszen — kettő kivételével — még nem írhattunk egyenlőségeket az egyenlőtlenségelek helyére. A kérdéscsoport alaposabb vizsgálata minden bizonnyal további érdekes elemi geometriai összefüggés feltárásához vezetne.

## IRODALOM

- [1] H. S. M. COXETER: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Bp., p. 379. 1973.
- [2] L. ALAOGU, J. H. GIESE: Uniform isohedral tori, American Math. Monthly, 53 14—17., 1946.
- [3] B. M. STEWART: Adventures among the toroids, Okemos, Michigan, Revised second edition p. 240. 1980.
- [4] SZILASSI L.: Egy poliéder, melynek bármely két lapja szomszédos, A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, 131—139. 1977.
- [5] CSÁSZÁR Á.: A polyhedron without diagonals, Acta Sci. Math. 13 140—142. 1949—50.

## EXTREMALE TOROIDE

### LAJOS SZILASSI

Die Arbeit befasst sich mit der Herstellung von Toroiden minimaler Blattzahl — topologisch torusartiger gewöhnlicher Polyeder — unter gegebenen Bedingungen.

Es werden zwei neue Varianten des als erstes in [5] beschriebenen diagonalfreien Toroid ( $C_0$ ) vorgestellt, von denen  $C_1$  (Abb. 3) nur in seinen Maßen,  $C_2$  aber auch in der Anordnung der Ecken von  $C_0$  abweicht. Tabelle 1 enthält die numerischen Daten der Toroide und Tabelle 2 die Symbole der die Oberfläche bildenden Dreiecke und ihre Anordnung.

Es wird ein Toroid vorgestellt, das sieben, paarweise benachbarte und paarweise kongruierende Bereiche hat, wo ein jeder Bereich aus vier Dreiecken besteht (Abb. 5, Tab. 3). Diese Konstruktion verfeinert die in [2] ausgesprochene Behauptung, wonach es ein 36-flächiges Toroid gibt, dessen Flächen Dreiecke sind, welche hinsichtlich der Kongruenz in zwei Klassen zu ordnen sind. Weiter zu verfeinern ist diese Behauptung auf 24, wenn anstatt des als Ausgang genommenen regelmässigen Siebenecks ein Sechseck verwendet wird (Tabelle 4). Die Körperecken dieser Toroide sind kongruent.

Auch B. M. Stewart hat die in [2] beschriebene Behauptung damit verfeinert: er konstruierte ein 36-flächiges, aus lauter kongruenten gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Toroid ([3] S. 250—253.). Durch weitere Verfeinerung dieses Ergebnisses kann ein solches Toroid auch aus 24 Flächen hergestellt werden (Abb. 6), wo die Basis der die Oberfläche bildenden gleichschenkligen Dreiecke  $a=2$ , und der Schenkel  $b = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 2,798$ .

## ТОРОИДЫ ЭКСПЕРИМЕНЬНОГО ХАРАКТЕРА

### СИЛАШШИ ЛАЙОШ

Настоящая работа занимается созданием тороидов минимального количества граней, которые с топологической точки зрения представляют собой обыкновенные торусообразные полиэдры.

В работе показывается два новых вида бездиагональных торида ( $C_0$ ), впервые описанных в (5), один из которых от  $C_1$  (3 схема) отличается от  $C_0$  только по своей величине, а другой  $C_2$ , отличается и в расположении вершин. Таблица №1 изображает нумерические данные тороидов, а на таблица №2 изображаются знаки и место треугольников, составляющих поверхность.

Нами описывается тороид, состоящий из семи попарно смежных и конгруэнтных областей, где каждая область состоит из четырех треугольников (Схема №5, Таблица №3). Эта конструкция в некотором отношении видоизменяет определения, данные (2), согласно которому есть такой тороид, который состоит из 36 граней, грани которого такие треугольники, которые с точки зрения конгруэнтности можно разделить на две группы. Это определение относится и к 24, если вместо семиугольника за основу возьмем шестиугольник. (Таблица №4). Многогранные углы этих тороидов являются конгруэнтными.

Определения, содержащиеся в (2) отчасти видоизменены Стюартом Б. М. тем, что им был сконструирован 36 гранный тороид, состоящий только из конгруэнтных, равнобедренных треугольников (3, стр. 250—253). Как дальнейшее развитие полученных результатов, тороид данного характера можно сконструировать и из 24 граней (Схема №7), где основание равнобедренных треугольников, составляющих его поверхность, равно  $a=2$ , бедро  $b = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 2,798$ .